

# Robotik III — Signalverarbeitung

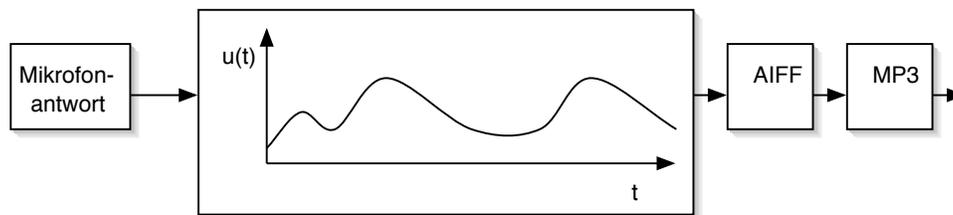
Markus Ehrenmann/Peter Steinhaus

20. Juni 2002

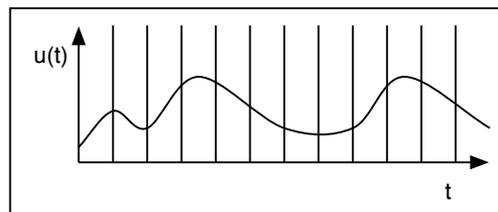
## 1 Digitalisierung

Von lat. *digis*, der Daumen. Der Daumen verfügt über einen kurzen und langen Fingerabschnitt. Gemeint bei der Digitalisierung ist die Überführung analoger Signale in einen *binären*, d.h. zweiwertigen Darstellungsform.

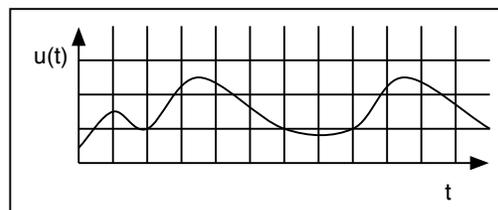
Erklärt werden soll die Digitalisierung zunächst am Beispiel von einer Mikrofonantwort, d.h. ein-dimensionalen Audiosignalen:



Die Digitalisierung besteht nun in einer zweifachen Diskretisierung des zeitlichen Spannungsverlaufs  $u(t)$ : der Zeitdiskretisierung oder Rasterung und der Quantisierung:



Abtastung erfolgt normalerweise äquidistant



Quantisierung erfolgt linear (mit gleich großen Abschnitten) oder nichtlinear

Mathematisch lässt sich die Digitalisierung folgendermaßen ausdrücken: aus

$$g_{analog} : R \rightarrow R$$

wird durch Rasterung

$$g_{gerastert} : [0 \dots n] \rightarrow R$$

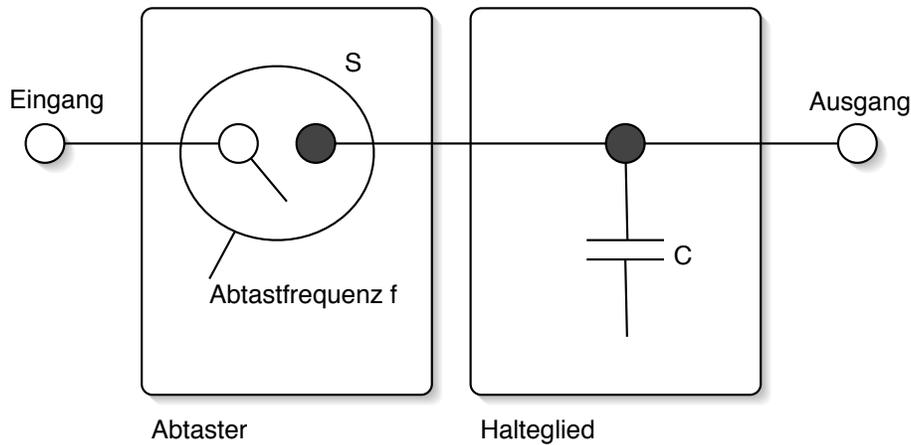
und daraus durch Quantisierung

$$g_{digital} : [0 \dots n] \rightarrow [0 \dots m]$$

.

## 1.1 Rasterung

Die Rasterung kann mit Hilfe einer *Sample and Hold* Schaltung erfolgen:



Der von der Abtastfrequenz  $f_A$  gesteuerte Abtaster schließt für kurze Zeit. Sobald er wieder öffnet, ist  $C$  auf  $U_{Eingang}$  aufgeladen.

Die Schaltung realisiert zwei unabhängige Funktionen:

- dem Signalfluß werden in periodischen Abständen Abtastwerte entnommen.
- und im Halteglied zwischengespeichert.

Grund für die Zwischenspeicherung: der Signalwert muß für die nachfolgende Verarbeitung eine gewisse Zeitspanne zur Verfügung stehen. Der Kondensator sollte daher sehr verlustarm sein.

## 1.2 Quantisierung

Die Quantisierung erfolgt meist auf Grund bipolarer Eingangswerte, d.h. es sind auch negative Werte zugelassen. Oft werden diese abgebildet nach  $[0 \dots 2^n - 1]_N$  oder mit dem Zweierkomplement dargestellt.

Erfasst werden kann:

- der Messwert zum Zeitpunkt  $t_i$  oder
- der Unterschied zwischen  $t_i$  und  $t_{i+1}$ . Da die Differenz oft klein ist, ist diese Methode speichersparend.

Charakteristisch für die Quantisierung ist der Quantisierungsfehler  $Q$ :

$$Q = \frac{\Delta U}{2^{n+1}}$$

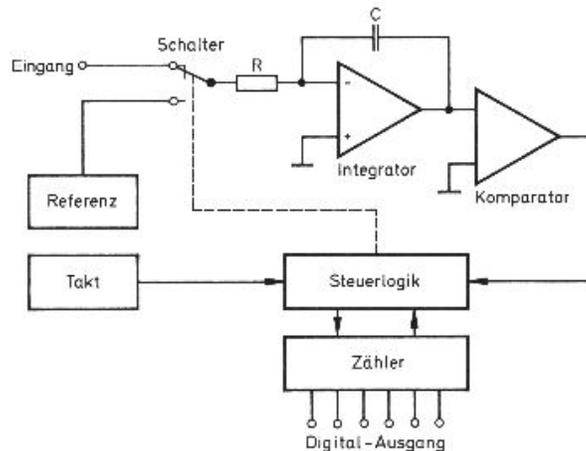
(mit  $\Delta U$  überdeckter Spannungsbereich und  $n$  Bits zur Darstellung).

### 1.3 A/D Wandlung

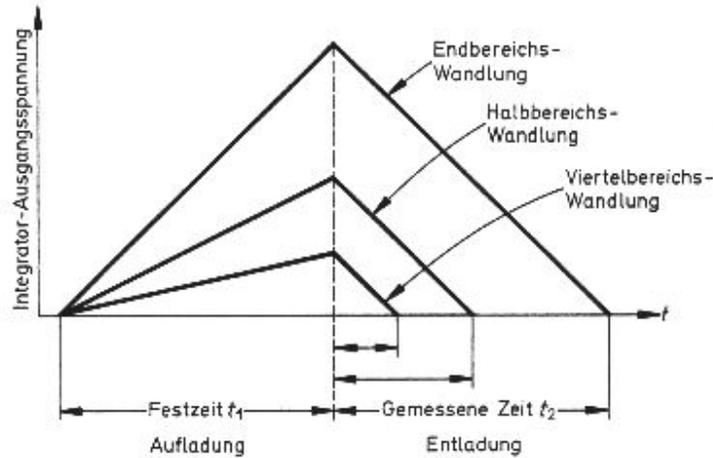
Im Folgenden werden drei Beispiele von Wandlern gegeben:

**Dual Slope Wandler, Integrationswandler**  $C$  wird während einer konstanten Integrationszeit  $t_1$  von der analogen Eingangsspannung aufgeladen: die Ladespannung  $U_C$  ist dann proportional zu  $U_{Eingang}$ . Nach  $t_1$  wird am Eingang des Integrators nun eine Gegenspannung  $U_{Ref}$  angelegt. Durch diese Gegenspannung wird  $C$  zeitproportional auf 0 Volt entladen. Die Entladezeit  $t_2$  wird über einen Zähler gemessen—dieses Ergebnis ist proportional zur Eingangsspannung. Es gilt:

$$t_2 = t_1 \frac{U_{Eingang}}{U_{Ref}}$$

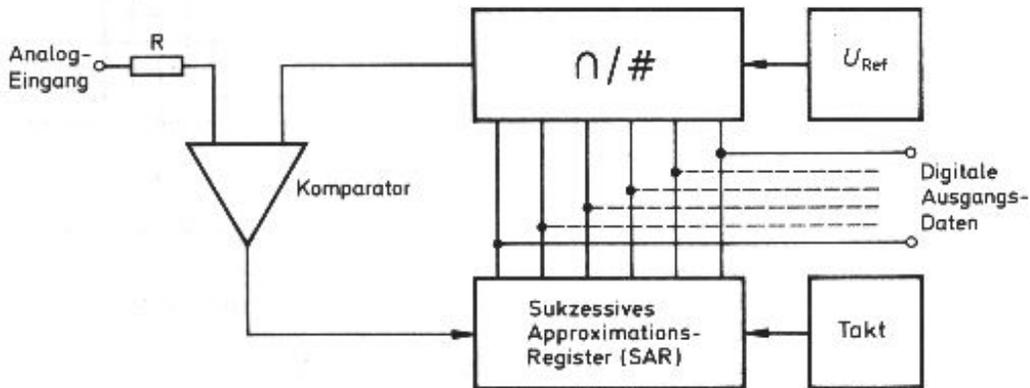


Den Spannungsverlauf und die Zeiten  $t_1$ ,  $t_2$  zeigt das folgende Bild.



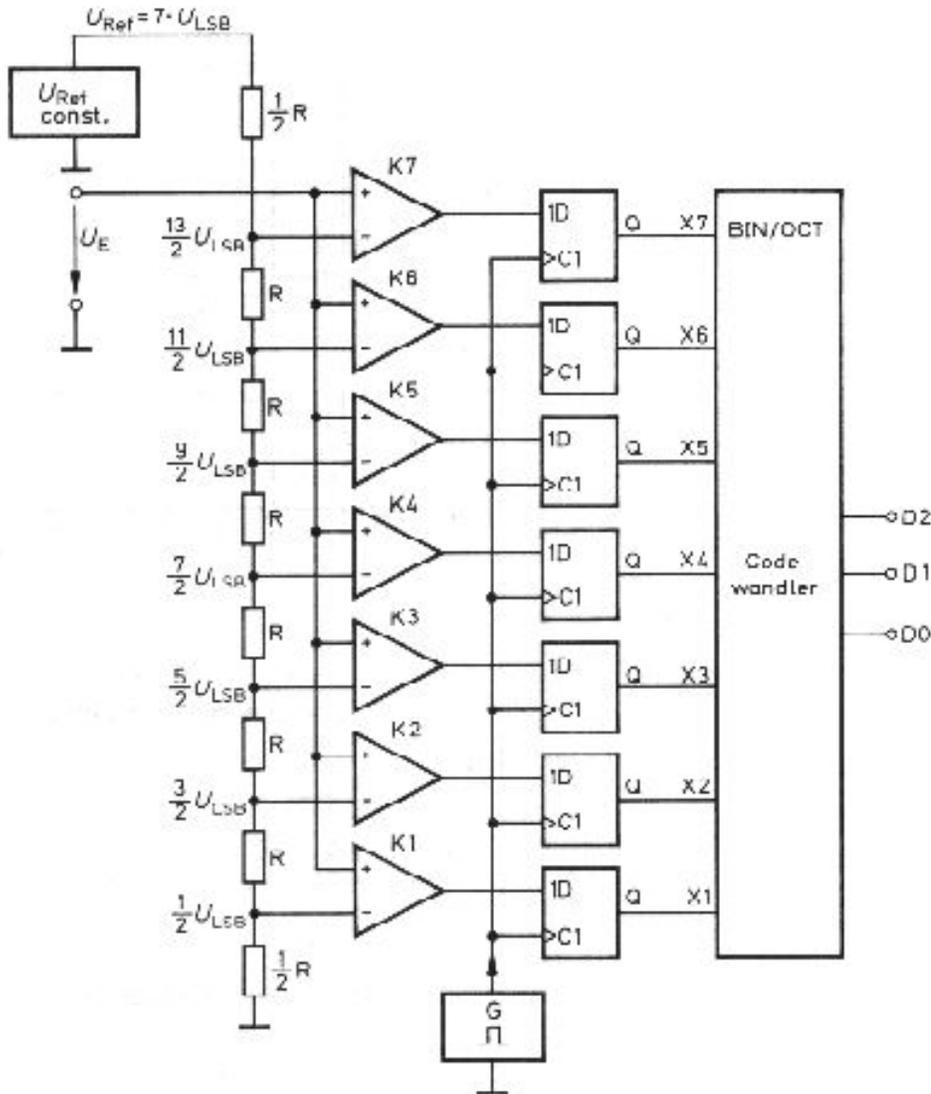
Die Meßfehler bei diesem Verfahren liegen im Bereich von 0,01%. Die Schaltung zeichnet sich durch ein einfaches Meßprinzip und durch simplen Aufbau aus. Allerdings ist die Wandlung langsam (ca. 100ms). Eingesetzt wird dieser Wandler oft in Digitalmultimetern, dort kann die Anzeige langsam sein.

**Sukzessiver Approximationswandler** Ähnlich zum Wiegevorgang: Hier sind Referenzspannungen  $U_{R_i}$  vorhanden. Die  $U_{R_i}$  sind so gestuft, dass sie sich halbieren. Begonnen wird mit dem größten Gewicht  $U_{R_0}$ : vergleiche dazu  $U_{Eingang} < U_{R_0}$ . Im nächsten Schritt wird der Vergleich mit  $U_{R_1}$  durchgeführt und die Leitung für  $U_{R_0}$  gelöscht. Der Vergleich selbst wird vom Komparator durchgeführt. Dieser entscheidet, ob  $U_{R_i}$  auf der Waage bleibt oder nicht.



Die Schaltung ist sehr einfach und billig. Wandler von diesem Typ finden sich oft zur Meßwerterfassung in PC-Karten.

**Flash-Wandler, Parallelwandler** Das Bild zeigt das Blockschnittbild eines Flash-Wandlers für 3-Bit-Zahlen, der nach dem Parallelverfahren arbeitet.



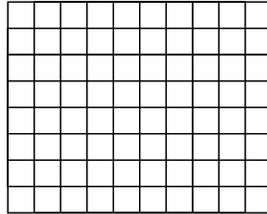
Mit einem Dualcode von 3 Bit muss der Eingangsspannungsbereich in  $2^3 = 8$  Quantisierungsintervalle aufgeteilt werden. Dazu sind sieben Komparatoren mit sieben Schwellspannungen nötig. Diese Schwellspannungen werden aus einer Referenzspannung generiert. Soll eine Eingangsspannung, die z.B. zwischen  $\frac{5}{2}U_{LSB}$  und  $\frac{7}{2}U_{LSB}$  liegt, umgewandelt werden, dann liefern die Komparatoren 1 bis 3 ein 1-Signal an ihren Ausgängen und die Komparatoren 4 bis 7 ein 0-Signal. Diese Komparatorzustände müssen nun noch durch eine Codewandlung in die Zahl 3 umgewandelt werden. Das geschieht durch eine 1-aus-2n-Codierung mit anschließender Umsetzung in einen Binärcode. Die Komparatorausgänge können den Codewandler jedoch nicht direkt ansteuern, da die nicht konstante Eingangsspannung zeitweise völlig falsche Dualcodes erzeugen kann.

Dies kann nur durch eine Sample-and-Hold Schaltung beseitigt werden, die ein Ändern der Eingangsspannung während der Wandlung verhindert. Durch diese Maßnahme wird jedoch die erreichbare Umwandlungsrate beeinträchtigt, da die Sample-and-Hold Schaltung eine gewisse Einstellzeit benötigt. Eine weitere Möglichkeit, ohne die Sample-and-Hold Schaltung auszukommen ist es, den Komparatoren flankengetriggerte D-Filflops nachzuschalten. So bleibt das

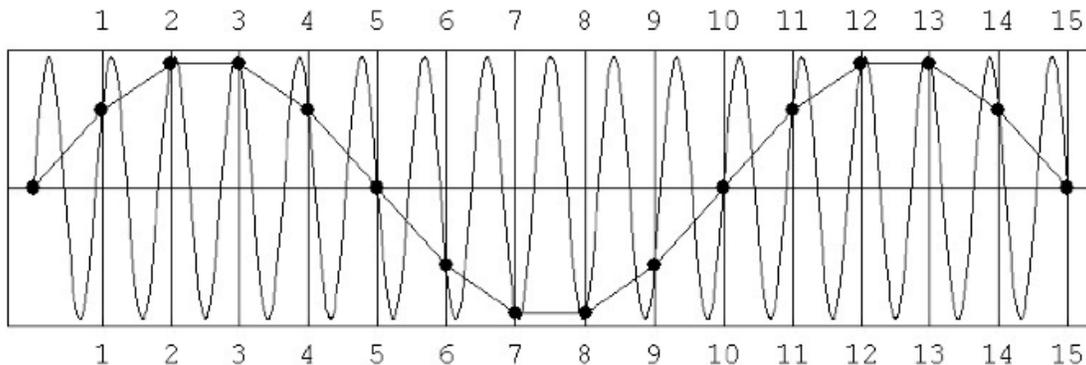
Eingangssignal des Codewandlers für eine ganze Taktperiode konstant.

Solche Flash-Wandler sind in der Lage, bis zu 100 MHz Umwandlungsrate zu erreichen. Der Nachteil ist aber das die Zahl der Komparatoren exponentiell mit der Bit-Zahl des digitalen Ausgangssignales zunimmt. So werden für einen 8-Bit-Wandler 255 Komparatoren benötigt.

Bei Kamerabildern wird ein kontinuierliches Bildsignal zweidimensional gerastert und in Grauwerten quantisiert. Üblich sind dabei 255 Grauwerte, 0 entspricht schwarz. Die aufnehmenden CCD-Elemente sind meist rechteckig mit einem Seitenverhältnis von 4:3. Die Auflösung beträgt bei der PAL-Norm  $640 \cdot 480$  Punkte.



Bei der Rasterung eines Signales ist unbedingt auf die Frequenz zu achten.  $\Delta t$  muss klein genug gewählt sein, um ein Signal geeignet abtasten zu können. Das Bild zeigt ein Beispiel mit einer Sinusfunktion der Frequenz  $f$ , das mit  $0.9f$  abgetastet worden ist.



## 2 Fourieranalyse

Zur Festlegung der Abtastfrequenz ist ein Exkurs in die Fourieranalyse notwendig. Die Fouriertransformation dient der Zerlegung eines Signals in seine Frequenzanteile.

### 2.1 Fouriertransformation und Eigenschaften

Signale werden durch die Fouriertransformation auf Funktionen abgebildet. Man schreibt:  $f(t) \circ \bullet F(\omega)$  mit

$$F(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

Die Inverse  $F(\omega) \circlearrowleft f(t)$  ist definiert als:

$$f(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{it\omega} d\omega$$

Man sagt: eine Fouriertransformierte  $F(\omega)$  sei das zu  $f(t)$  gehörige *Spektrum* oder liege im Frequenzbereich. Warum? Das Integral ähnelt einem Skalarprodukt und mit  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  zeigt sich, dass hier über das Skalarprodukt mit Schwingfunktionen aller Frequenzen deren Anteil in  $f(t)$  bestimmt wird.

Oft ist  $f(t)$  reell,  $F(\omega)$  komplex mit  $F(\omega) = \text{Re}(F(\omega)) + i\text{Im}(F(\omega))$ .

Definiert wird:

**Fourierspektrum von  $f(t)$ :**

$$|F(\omega)| = \sqrt{\text{Re}(F(\omega))^2 + \text{Im}(F(\omega))^2}$$

**Energiespektrum von  $f(t)$ :**

$$|F(\omega)|^2 = \text{Re}(F(\omega))^2 + \text{Im}(F(\omega))^2$$

**Phasenspektrum von  $f(t)$ :**

$$\Phi(\omega) = \arctan \frac{\text{Im}(F(\omega))}{\text{Re}(F(\omega))}$$

Wichtige Eigenschaften der Fouriertransformierten sind:

**Superposition, Linearität**

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \circlearrowleft \alpha F(\omega) + \beta G(\omega)$$

(Beweis durch simples Ausrechnen des Integrals)

**Ähnlichkeit**

$$f(\alpha t) \circlearrowleft \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

Speziell gilt:  $f(-t) \circlearrowleft F(-\omega)$

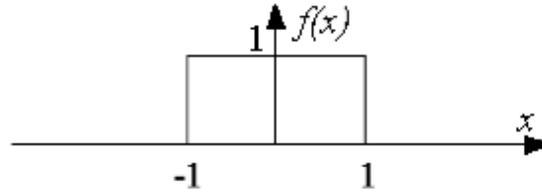
**Verschiebung**

$$f(t - t_0) \circlearrowleft e^{-i\omega t_0} F(\omega)$$

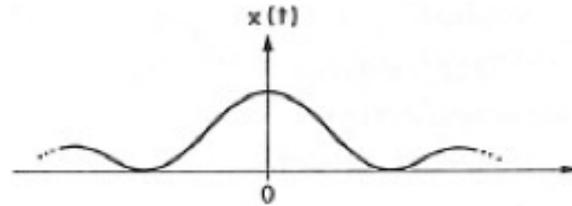
Beweis:  $f(t - t_0) \circlearrowleft \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t - t_0) e^{-i\omega t} dt$ , mit der Substitution  $\theta := t - t_0$ ,  $d\theta := dt$  ist dies

$$\text{gleich: } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(\theta) e^{-i\omega(\theta+t_0)} d\theta = e^{-i\omega t_0} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta}_{=F(\omega)}$$

Beispiel: Fouriertransformierte eines Rechteckimpulses (der Einfachheit halber ohne Faktor  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  ausgerechnet)



$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-1}^1 e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega} [e^{i\omega t}]_{-1}^1 = \frac{1}{\omega} (-i) \frac{e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{2} = \frac{\sin \omega}{\omega} = \text{sinc}(\omega)$$

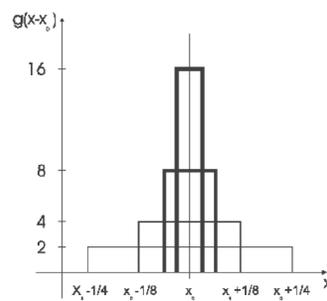


Interessanterweise gilt dasselbe auch umgekehrt:  $\text{sinc}(t) \leftrightarrow$  Rechteckfunktion. Ähnlich kann man zeigen, dass eine Gaußfunktion durch die Fouriertransformation bis auf einen Faktor wieder eine Gaußfunktion ergibt.

## 2.2 Formulierung der Abtastung

Um die Abtastung mathematisch zu modellieren, wird der sogenannte *Dirac-Impuls* (Delta-Funktion) verwendet. Eigentlich liegt hier keine Funktion vor, sondern eine Distribution. Sie soll stetig sein und stetige Ableitungen haben. Definiert ist die Delta-Funktion als Grenzwert einer Funktionenfolge:

$$g_n(t) = \begin{cases} n & |t| \leq \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Es gilt:

$$\delta(t) = 0, t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

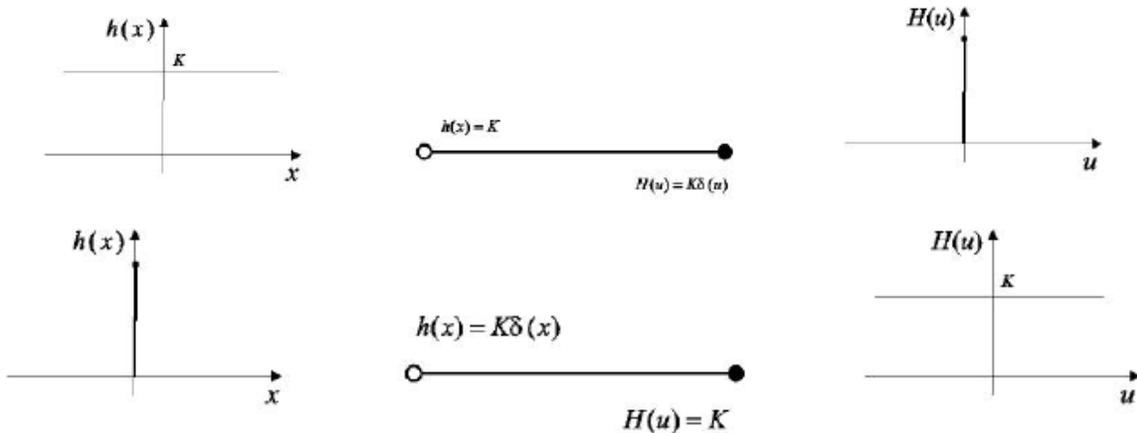
Eine Testfunktion  $f(t)$  kann damit abgetastet werden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0)$$

Es gelten folgende Beziehungen:

$$f(t) = k \circ \bullet F(\omega) = k\delta(\omega)$$

$$f(t) = k\delta(t) \circ \bullet F(\omega) = k$$



Die Abtastung einer Testfunktion an mehreren Stellen kann durch eine Kammfunktion realisiert werden:

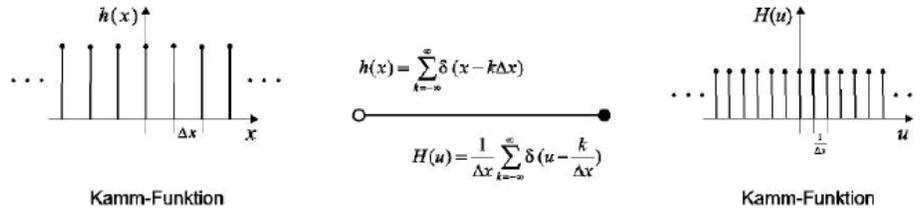
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta_t)$$

Das abgetastete Signal  $\overline{f(t)}$ , das sogenannte Abtastsignal mit der Abtastperiode  $\Delta_t$  berechnet sich mit Hilfe dieser Kammfunktion zu:

$$\overline{f(t)} = \sum f(k\Delta_t) \delta(t - k\Delta_t)$$

Die äquidistante Abtastung einer Funktion kann damit im Ortsraum formuliert werden. Wie sieht das im Frequenzraum aus? Die Kammfunktion wird durch die Fouriertransformation wieder auf eine Kammfunktion abgebildet:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta_t) \circ \bullet F(\omega) = \frac{1}{\Delta_t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{k}{\Delta_t})$$



Die punktweise Multiplikation, die man ausserdem benötigt, wird jedoch im Frequenzraum auf eine Faltung abgebildet:

$$g(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-a)h(a)da$$

Graphisch entspricht die Faltung dem folgenden Vorgehen (1D):

- Spiegelung der Funktion  $g$  ( $g(-a)$ )
- Verschiebung von  $g$  um  $-a$
- Punktweise Multiplikation und anschließende Integration

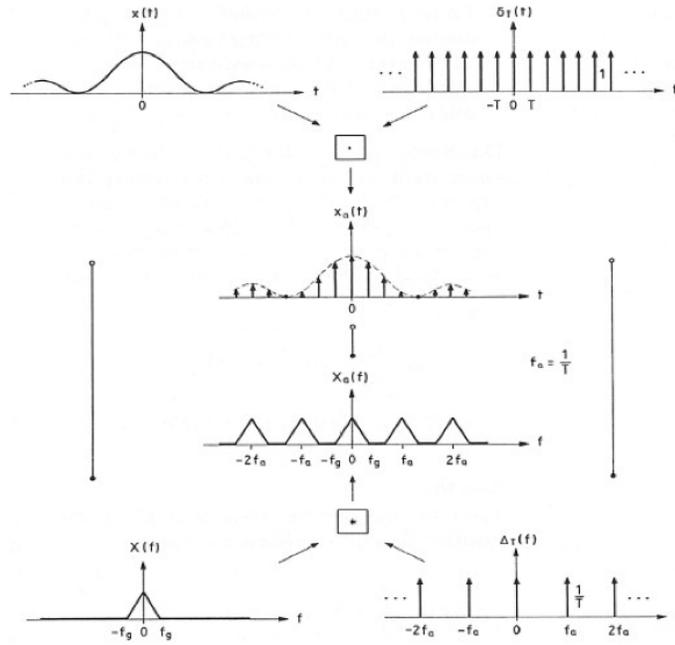
Es gilt:

$$g(t) \otimes h(t) \circ \bullet G(\omega) \cdot H(\omega)$$

$$g(t) \cdot h(t) \circ \bullet G(\omega) \otimes H(\omega)$$

Beweis:  $g(t) \otimes h(t) \circ \bullet \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \int g(t-a)h(a)da e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \int g(t-a)h(a)e^{-i\omega t} dt da$ . Mit der Substitution  $s = t - a$  gilt:  $\dots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \int g(s)h(a)e^{-i\omega(s+a)} ds da = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\int g(s)e^{-i\omega s} ds \int h(a)e^{-i\omega a} da] = G(\omega)H(\omega)$

Damit lässt sich der Abtastvorgang graphisch veranschaulichen. Ein Beispiel zeigt die Abtastung einer Funktion:



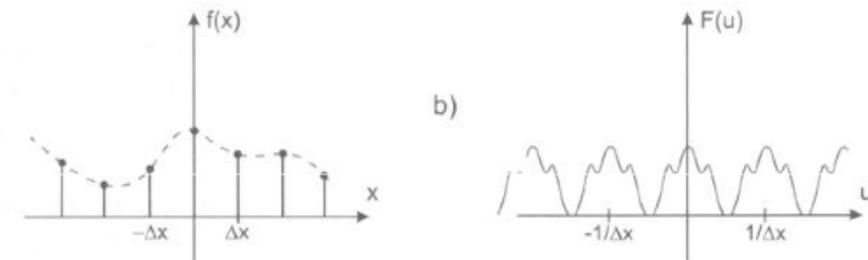
### 2.3 Abtasttheorem von Whittaker-Shannon

Unter welchen Bedingungen lässt sich nun eine kontinuierliche Funktion aus äquidistanten Abtastwerten exakt rekonstruieren?

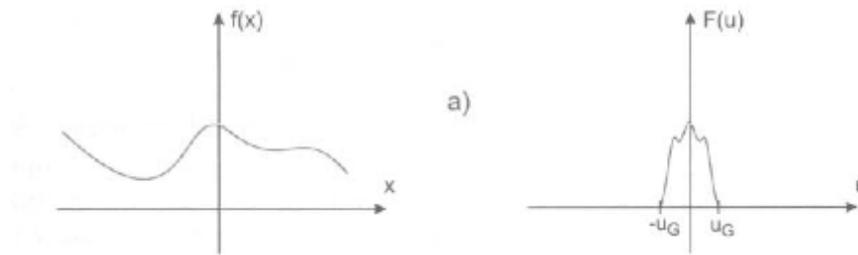
Das Abtastsignal sieht folgendermaßen im Frequenzraum aus:

$$\overline{f(t)} = \sum_k f(k\Delta_t)\delta(t - k\Delta_t) \circ \bullet F(\omega) \otimes \frac{1}{\Delta_t} \sum \delta(\omega - \frac{k}{\Delta_t})$$

Es besteht, wie man auch im obigen Bild sieht, aus skalierten Kopien von  $F(\omega)$  im Abstand  $\frac{1}{\Delta_t}$ .

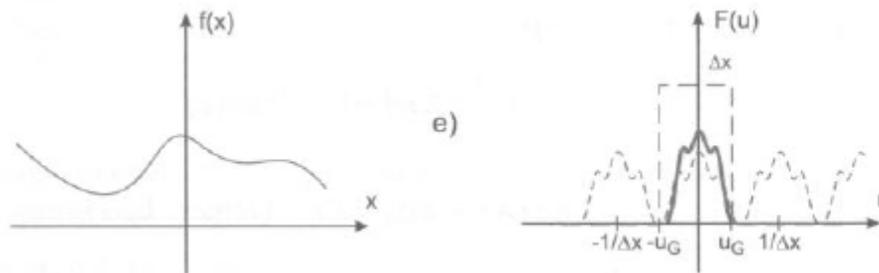


Sei die Funktion  $f(t)$  bandbegrenzt durch eine Grenzfrequenz  $\omega_G$ , d.h.  $F(\omega) = 0$  für  $|\omega| > \omega_G$ .



Wenn gilt:  $\omega_G < \frac{1}{2\Delta_t}$  dann gilt:

- Die Kopien von  $F(\omega)$  überlappen sich nicht
- Die Spektren  $F(\omega)$  und  $\overline{F(\omega)}$  stimmen auf dem Intervall  $[-\omega_G, \omega_G]$  bis auf den Skalierungsfaktor  $\frac{1}{\Delta_t}$  überein
- Das Frequenzspektrum von  $F(\omega)$  kann vollständig aus dem Abtastsignal und damit den Abtastwerten berechnet werden.



Gilt aber  $\omega_G \geq \frac{1}{2\Delta_t}$ , dann:

- Die Kopien von  $F(\omega)$  überlappen sich
- In den Überschneidungsbereichen bilden sich Summen
- Es ist unmöglich,  $F(\omega)$  aus den Abtastwerten wiederzugewinnen
- Die Überlappung der Spektren von  $F(\omega)$  wird als Aliasing bezeichnet.
- Frequenzen der Fouriertransformierten  $F(\omega)$  ausserhalb des Intervalls  $[\frac{-1}{\Delta_t}, \frac{1}{\Delta_t}]$  werden durch den Abtastprozess falsch in das Intervall  $[\frac{-1}{\Delta_t}, \frac{1}{\Delta_t}]$  übersetzt (aliased).

Die maximal erlaubte Grenzfrequenz  $\omega_G = \frac{1}{2\Delta_t}$ , unterhalb der kein Aliasing auftritt, heisst Nyquist-Frequenz. Abhilfe: hoch abtasten oder Signal durch Tiefpassfilter bandbegrenzen.

Die Rekonstruktion von  $f$  aus Abtastwerten kann erreicht werden durch Berechnung des Ortsfrequenzspektrums  $F(\omega)$  aus  $\overline{F(\omega)}$ . Dazu multipliziert man  $\overline{F(\omega)}$  mit einer Rechteckfunktion, die alle

Frequenzen grösser als  $\omega_G$  ausblendet. Die inverse Fouriertransformierte von  $F(\omega) = \overline{F(\omega) \cdot R(\omega)}$  ist  $f$ .

Das Abtasttheorem von Whittaker-Shannon: Existiert für eine Funktion  $f(t)$  eine endliche Grenzfrequenz  $\omega_G$ , sodass das Spektrum  $F(\omega) = 0$  ist für alle  $\omega > \omega_G$ , so gilt:

- die abgetastete Funktion  $f(t)$  ist aus den Abtastwerten  $f(k\delta t)$  fehlerfrei rekonstruierbar
- sofern die Abtastfrequenz  $\frac{1}{\Delta t}$  mehr als doppelt so hoch wie  $\omega_G$  ist ( $\frac{1}{\Delta t} > 2\omega_G$ ).